

---

# AUTOMORPHISMES NATURELS DE L'ESPACE DE DOUADY DE POINTS SUR UNE SURFACE

*par*

Samuel Boissière

---

**Résumé.** — On établit quelques résultats généraux relatifs à la taille du groupe d'automorphismes de l'espace de Douady de points sur une surface, puis on étudie quelques propriétés des automorphismes provenant d'un automorphisme de la surface, en particulier leur action sur la cohomologie et la classification de leurs points fixes.

## Introduction

Autant l'on sait dire beaucoup sur les automorphismes des surfaces K3, notamment grâce au théorème de Torelli global, autant en dimension supérieure le groupe d'automorphismes des variétés symplectiques holomorphes irréductibles est plus délicat à étudier (voir [18]). Ce constat est la motivation première de cet article, au sens où si  $S$  est une surface K3, l'espace de Douady de  $n$  points sur  $S$ , noté  $S^{[n]}$ , est une variété symplectique holomorphe irréductible particulièrement bien connue. Dans cet article, on étudie ce groupe d'automorphismes pour une surface quelconque (le cas des surfaces K3 est traité dans [4]).

Dans une première partie, on répond à quelques questions générales relatives à ce groupe d'automorphismes. Principalement, on montre que :

- pour toute surface  $S$  et tout  $n \geq 1$ ,  $\dim \operatorname{Aut}(S^{[n]}) = \dim \operatorname{Aut}(S)$  ;
- si  $S$  est une surface K3 non algébrique générique, pour tout  $n \geq 1$  on a  $\operatorname{Aut}(S^{[n]}) \cong \operatorname{Aut}(S)$ .

Ces résultats motivent la seconde partie où l'on étudie plus en détail, pour une surface  $S$  quelconque, les automorphismes de  $S^{[n]}$  provenant d'un automorphisme de  $S$  (automorphismes dits *naturels*) : leur action sur la cohomologie, leurs nombres de Lefschetz et la classification de leurs points fixes.

Je remercie Alessandra Sarti de m'avoir incité à étudier ces questions et pour son soutien lors de la préparation de cet article, et Arnaud Beauville, Serge Cantat, Antoine Ducros et Manfred Lehn pour les réponses qu'ils m'ont apportées.

---

*Classification mathématique par sujets (2000).* — 14C05.

*Mots clefs.* — Schéma de Hilbert, automorphismes, points fixes.

## 1. Espace de Douady de points sur une surface

**1.1. Notations et définitions.** — Soit  $S$  une surface analytique complexe connexe, compacte et lisse. Pour tout entier  $n \geq 0$ , notons  $S^{(n)} := S^n / \mathfrak{S}_n$  le quotient symétrique de  $S$ , où le groupe symétrique  $\mathfrak{S}_n$  agit par permutation des variables,  $\pi : S^n \rightarrow S^{(n)}$  l'application quotient,  $\Delta = \bigcup_{i,j} \Delta_{i,j}$  la réunion de toutes les diagonales  $\Delta_{i,j} = \{(x_1, \dots, x_n) \in S^n \mid x_i = x_j\}$  et  $D := \pi(\Delta)$  son image dans  $S^{(n)}$ . La variété  $S^{(n)}$  paramètre les cycles analytiques de dimension zéro et de longueur  $n$  sur  $S$ , et est singulière en chaque point de  $\Delta$ . Notons  $S^{[n]}$  l'espace de Douady (schéma de Hilbert lorsque  $S$  est algébrique) paramétrant les sous-espaces analytiques de  $S$  de dimension 0 et de longueur  $n$ .  $S^{[n]}$  est une variété analytique complexe compacte lisse de dimension  $2n$  (observons que  $S^{[0]}$  est un point et  $S^{[1]} \cong S$ ). Le morphisme de Douady-Barlet (de Hilbert-Chow dans le cas algébrique)  $\rho : S^{[n]} \rightarrow S^{(n)}$  est projectif et biméromorphe, c'est une résolution des singularités dont nous notons  $E := \rho^{-1}(D)$  le diviseur exceptionnel. Posons  $S^{[\bullet]} := \coprod_{n \geq 0} S^{[n]}$ . Nous nous référons à Grothendieck [17] et Fogarty [10, 11] dans le cas algébrique, à Douady [8] et de Cataldo & Migliorini [6] dans le cas analytique.

**1.2. Automorphismes naturels.** — Soit un automorphisme  $f : S^{[\bullet]} \xrightarrow{\sim} S^{[\bullet]}$ . Sa restriction à chaque composante connexe  $S^{[n]}$  est un isomorphisme d'image une composante connexe de même dimension, donc  $f|_{S^{[n]}} =: f_n$  est un automorphisme de  $S^{[n]}$ . Ainsi, la donnée de  $f$  consiste exactement en la donnée d'une famille  $(f_n)_{n \geq 0}$  où chaque  $f_n$  est un automorphisme de  $S^{[n]}$ .

Une manière naturelle de construire un automorphisme de  $S^{[n]}$  consiste à partir d'un automorphisme de  $S$  : si  $f \in \text{Aut}(S)$ , il induit pour tout  $n \geq 1$  un automorphisme de  $S^{[n]}$  noté  $f^{[n]}$  défini par  $f^{[n]}(\xi) := f(\xi)$  où  $\xi$  est vu à gauche comme point de  $S^{[n]}$  et à droite comme sous-espace analytique de  $S$ .

Pour  $\xi, \xi' \in S^{[\bullet]}$ , la notation  $\xi \subset \xi'$  signifie que  $\xi$  est un sous-espace analytique de  $\xi'$  dans  $S$ .

**Définition 1.** — Un automorphisme  $f$  de  $S^{[\bullet]}$  est dit naturel s'il vérifie pour tous  $\xi, \xi' \in S^{[\bullet]}$  :

$$\xi \subset \xi' \implies f(\xi) \subset f(\xi').$$

Notons  $\Xi_n \subset S \times S^{[n]}$  la famille universelle, dont les points sont les couples  $(x, \xi) \in S \times S^{[n]}$  tels que  $x$  appartient au support de  $\xi$  (nous noterons  $x \in \xi$ ). Pour tous entiers  $n \geq 0$  et  $k \geq 1$ , notons  $S^{[n, n+k]}$  la sous-variété de  $S^{[n]} \times S^{[n+k]}$  dont les points sont les couples  $(\xi, \xi') \in S^{[n]} \times S^{[n+k]}$  tels que  $\xi \subset \xi'$ . Pour  $k = 1$ ,  $S^{[n, n+1]}$  est lisse de dimension  $2n$ .

**Lemme 1.** — Soit  $f = (f_n)_{n \geq 0}$  un automorphisme de  $S^{[\bullet]}$ . Les assertions suivantes sont équivalentes :

1.  $f$  est un automorphisme naturel.
2.  $f$  respecte les variétés d'incidence :  $\forall n, k, (f_n \times f_{n+k})(S^{[n, n+k]}) = S^{[n, n+k]}$  ;
3.  $f$  respecte les familles universelles :  $\forall n, (f_1 \times f_n)(\Xi_n) = \Xi_n$  ;
4.  $f$  provient d'un automorphisme de  $S$  :  $\forall n, f_n = f_1^{[n]}$ .

*Démonstration.* —

(1) $\Rightarrow$ (2) Soit  $(\xi, \xi') \in S^{[n, n+k]}$ . On a  $\xi \subset \xi'$  et puisque  $f$  est naturel :

$$f_n(\xi) = f(\xi) \subset f(\xi') = f_{n+k}(\xi'),$$

donc  $(f_n \times f_{n+k})(\xi, \xi') = (f_n(\xi), f_{n+k}(\xi')) \in S^{[n, n+k]}$ .

(2) $\Rightarrow$ (3) C'est immédiat puisque  $\Xi_n = S^{[1, n]}$ .

(3) $\Rightarrow$ (4) Il suffit de vérifier l'égalité  $f_n = f_1^{[n]}$  sur l'ouvert dense de  $S^{[n]}$  constitué des sous-espaces portés en  $n$  points distincts de  $S$ . Soit  $\xi = \{x_1, \dots, x_n\}$  un tel sous-espace. Pour tout  $i$ ,  $x_i \in \xi$  et la condition  $(f_1 \times f_n)(\Xi_n) = \Xi_n$  implique  $f_1(x_i) \in f_n(\xi)$ . Puisque les points  $f_1(x_1), \dots, f_1(x_n)$  sont distincts, on obtient  $f_n(\xi) = f_1(\xi) = f_1^{[n]}(\xi)$ .

(4) $\Rightarrow$ (1) Soit  $(\xi, \xi') \in S^{[n, n+k]}$ . Avec les notations précédentes :

$$f(\xi) = f_n(\xi) = f_1^{[n]}(\xi) = f_1(\xi) \subset f_1(\xi') = f_1^{[n+k]}(\xi') = f_{n+k}(\xi') = f(\xi').$$

□

Observons que l'assertion (2) est équivalente à l'assertion :

(2')  $f$  respecte la variété d'incidence  $S^{[n, n+1]} : \forall n, (f_n \times f_{n+1})(S^{[n, n+1]}) = S^{[n, n+1]}$ .

En effet, (2) $\Rightarrow$ (2') est immédiat et réciproquement, si  $(\xi, \xi') \in S^{[n, n+k]}$ , on peut construire une tour de sous-espaces  $\xi_0 = \xi \subset \xi_1 \subset \dots \subset \xi_{k-1} \subset \xi_k = \xi'$  avec  $(\xi_i, \xi_{i+1}) \in S^{[n+i, n+i+1]}$  pour tout  $i = 0, \dots, k-1$ . L'assertion (2') appliquée à cette tour fournit :

$$f_n(\xi) \subset f_{n+1}(\xi_1) \subset \dots \subset f_{n+k-1}(\xi_{k-1}) \subset f_{n+k}(\xi'),$$

donc  $(f_n(\xi), f_{n+k}(\xi')) \in S^{[n, n+k]}$ .

## 2. Le groupe d'automorphismes de l'espace de Douady de points

**2.1. Rappel sur les groupes d'automorphismes.** — Soit  $X$  un espace analytique complexe connexe, compact et lisse. Soit  $D_X$  l'espace analytique des sous-espaces analytiques compacts de  $X \times X$ . D'après Douady [8], l'espace des applications holomorphes de  $X$  dans lui-même s'identifie – en prenant le graphe – à un ouvert de  $D_X$  dont le groupe  $\text{Aut}(X)$  des automorphismes est à nouveau un ouvert. D'après Kerner [19] et Bochner-Montgomery [3],  $\text{Aut}(X)$  est un groupe de Lie complexe localement compact. D'après Fujiki [12],  $X$  ayant une base dénombrable d'ouverts, c'est aussi le cas de  $D_X$ , donc  $\text{Aut}(X)$  est dénombrable à l'infini. En particulier, le nombre de composantes connexes de  $\text{Aut}(X)$  est au plus dénombrable. L'algèbre de Lie de  $\text{Aut}(X)$  s'identifie naturellement à l'espace des champs de vecteurs globaux sur  $X$ , donc  $\dim \text{Aut}(X) = \dim H^0(X, T_X)$  (noté  $h^0(X, T_X)$ ) où  $T_X$  désigne le fibré tangent de  $X$ , et toutes les composantes connexes ont même dimension (finie). Si cette dimension est nulle,  $\text{Aut}(X)$  est alors totalement discontinu et au plus dénombrable.

**2.2. Groupe des automorphismes naturels.** — Considérons la famille universelle double  $\Xi_n \times \Xi_n \subset S \times S \times S^{[n]} \times S^{[n]}$  (on a permuté deux facteurs) :

$$\Xi_n \times \Xi_n = \{(x, x', \xi, \xi') \mid x \in \xi, x' \in \xi'\}$$

munie des projections  $p$  et  $q$  vers  $S \times S$  et  $S^{[n]} \times S^{[n]}$  respectivement. A tout sous-espace analytique compact  $\Gamma \subset S \times S$  on associe alors l'espace analytique compact  $q(p^{-1}(\Gamma)) \subset S^{[n]} \times S^{[n]}$ . Cette construction se faisant naturellement en famille, on obtient une application holomorphe  $D_S \rightarrow D_{S^{[n]}}$ . Si  $\Gamma$  est le graphe d'un isomorphisme  $f$  de  $S$ ,  $q(p^{-1}(\Gamma))$  est le graphe de  $f^{[n]}$  donc ce morphisme se restreint en un morphisme de groupes de Lie injectif  $\text{Aut}(S) \rightarrow \text{Aut}(S^{[n]})$  d'image fermée puisque ces groupes sont localement compacts ([14, 1.3]). Avec un léger abus de langage, nous appellerons ce groupe image le *groupe des automorphismes naturels de  $S^{[n]}$* .

**2.3. Dimension du groupe d'automorphismes.** — Pour toute variété analytique complexe lisse compacte  $X$  de dimension  $d$ , notons  $\Omega_X := T_X^\vee$  le fibré vectoriel des formes différentielles de degré 1 sur  $X$ , pour  $2 \leq p \leq d-1$  notons  $\Omega_X^p := \wedge^p \Omega_X$  et  $\omega_X := \wedge^d \Omega_X$  son fibré canonique. Les nombres de Hodge de  $X$  sont par définition  $h^{p,q}(X) := \dim H^q(X, \Omega_X^p)$ . Plus généralement, pour tout fibré inversible  $L$  sur  $X$ , nous introduisons les *nombres de Hodge de  $X$  à valeurs dans  $L$*  :  $h^{p,q}(X, L) := \dim H^q(X, \Omega_X^p \otimes L)$ . Par dualité de Serre, on voit qu'ils vérifient :

$$\begin{aligned} h^{p,q}(X, L) &= h^q(X, \Omega_X^p \otimes L) \\ &= h^{d-q}(X, (\Omega_X^p \otimes L)^\vee \otimes \Omega_X^d) \\ &= h^{d-q}(X, \Omega_X^{d-p} \otimes L^\vee) \\ &= h^{d-p, d-q}(X, L^\vee). \end{aligned}$$

On observe que  $h^0(S^{[n]}, T_{S^{[n]}}) = h^{2n}(S^{[n]}, \Omega_{S^{[n]}} \otimes \omega_{S^{[n]}})$ . Rappelons la construction du morphisme de groupes naturel  $-_n : \text{Pic}(S) \rightarrow \text{Pic}(S^{[n]})$ . Notons  $p_i : S^n \rightarrow S$  les projections sur les facteurs. Pour tout fibré  $L \in \text{Pic}(S)$ , le fibré  $\bigotimes_{i=1}^n p_i^* L$  est naturellement  $\mathfrak{S}_n$ -linéarisé et descend en un fibré  $\mathcal{L} \in \text{Pic}(S^{(n)})$  puisque les groupes d'isotropie des points agissent trivialement sur les fibres au-dessus. On définit alors  $L_n := \rho^* \mathcal{L}$ . On peut montrer que  $\omega_{S^{[n]}} = (\omega_S)_n$  (voir par exemple Nieper-Wisskirchen [24]), on a donc  $h^0(S^{[n]}, T_{S^{[n]}}) = h^{2n}(S^{[n]}, \Omega_{S^{[n]}} \otimes (\omega_S)_n)$ .

La proposition suivante généralise le résultat de Göttsche [15, Proposition 3.3] relatifs aux nombres de Hodge usuels.

**Proposition 1.** — *Pour toute surface analytique compacte lisse  $S$  et tout fibré inversible  $L$  sur  $S$  on a :*

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \sum_{p=0}^{2n} h^{p,0}(S^{[n]}, L_n) x^p t^n = \frac{(1+xt)^{h^{1,0}(S,L)}}{(1-t)^{h^{0,0}(S,L)}(1-x^2t)^{h^{2,0}(S,L)}}.$$

*Démonstration.* — Ce calcul est une généralisation directe de celui de Göttsche [15], donc nous expliquons simplement les points-clés de l'argument. Notons  $S_*^{(n)} := S^{(n)} \setminus D$  l'ouvert lisse et  $j : S_*^{(n)} \hookrightarrow S^{(n)}$  l'inclusion. Pour  $p = 0, \dots, 2n$

définissons  $\tilde{\Omega}_{S^{(n)}}^p := j_* \Omega_{S_*^{(n)}}^p$ . Puisque  $\rho: S^{[n]} \rightarrow S^{(n)}$  est une résolution des singularités, on peut montrer que  $\rho_* \Omega_{S^{[n]}}^p = \tilde{\Omega}_{S^{(n)}}^p$  (voir Steenbrink [26]). On a alors :

$$H^0(S^{[n]}, \Omega_{S^{[n]}}^p \otimes L_n) \cong H^0(S_*^{(n)}, \Omega_{S_*^{(n)}}^p \otimes \mathcal{L}) \cong H^0\left(S^n, \Omega_{S^n}^p \otimes \bigotimes_{i=1}^n p_i^* L\right)^{\mathfrak{S}_n}.$$

Par la formule de Künneth,  $H^0(S^n, \Omega_{S^n}^* \otimes \bigotimes_{i=1}^n p_i^* L) \cong \bigotimes_{i=1}^n p_i^* H^0(S, \Omega_S^* \otimes L)$ . Soit  $\omega_1, \dots, \omega_m$  une base homogène de  $H^0(S, \Omega_S^* \otimes L)$  : pour tout  $i = 1, \dots, m$  il existe  $d_i \in \{0, 1, 2\}$  tel que  $\omega_i \in H^0(S, \Omega_S^{d_i} \otimes L)$ . Une base de  $H^0(S^n, \Omega_{S^n}^* \otimes \bigotimes_{i=1}^n p_i^* L)^{\mathfrak{S}_n}$  est donc formée des  $\sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \sigma^* \eta$  pour  $\eta$  de la forme  $p_1^* \omega_{i_1} \wedge \dots \wedge p_n^* \omega_{i_n}$  avec  $\sum_{j=1}^n d_{i_j} = p$ . Un peu de combinatoire permet alors de conclure.  $\square$

**Corollaire 1.** — *Pour toute surface analytique compacte lisse  $S$  et tout  $n \geq 1$  on a  $\dim \text{Aut}(S^{[n]}) = \dim \text{Aut}(S)$ .*

*Démonstration.* — Observons que

$$h^0(S^{[n]}, T_{S^{[n]}}) = h^{1,2n}(S^{[n]}, (\omega_S)_n) = h^{2n-1,0}(S^{[n]}, ((\omega_S)_n)^\vee) = h^{2n-1,0}(S^{[n]}, (\omega_S^\vee)_n).$$

Un examen attentif de la formule donnée dans la proposition 1 fournit :

$$h^{2n-1,0}(S^{[n]}, L_n) = h^{1,0}(S, L) \binom{n-1}{h^{2,0}(S, L) + n - 2}.$$

Or, on calcule que  $h^{1,0}(S, \omega_S^\vee) = h^0(S, T_S)$  et  $h^{2,0}(S, \omega_S^\vee) = h^{2,2}(S) = 1$ , ce qui donne  $h^0(S^{[n]}, T_{S^{[n]}}) = h^0(S, T_S)$ .  $\square$

Ce résultat implique que les composantes connexes de l'identité de  $\text{Aut}(S^{[n]})$  et  $\text{Aut}(S)$  sont isomorphes, et de façon intuitive : il n'y a "pas trop" d'automorphismes non naturels. Il est notable que la dimension de  $\text{Aut}(S^{[n]})$  ne dépende pas de  $n$  !

**Remarque 1.** — *Si  $S$  est un tore ou une surface K3, le faisceau canonique  $\omega_S$  est trivial et  $S^{[n]}$  admet une structure symplectique [2, proposition 5] donc  $T_{S^{[n]}} \cong \Omega_{S^{[n]}}$  et  $h^0(S^{[n]}, T_{S^{[n]}}) = h^{1,0}(S^{[n]})$ . La formule de Göttsche citée plus haut donne immédiatement  $h^0(T_{S^{[n]}}) = h^{1,0}(S) = h^0(T_S)$  (qui vaut 2 pour un tore complexe et 0 pour une surface K3).*

La proposition 1 suggère la conjecture suivante généralisant la formule donnant les nombres de Hodge usuels conjecturée par Göttsche [15], démontrée par Göttsche&Soergel [16] (voir aussi Cheah [7]) dans le cas algébrique et généralisée par de Cataldo&Migliorini [6] aux surfaces analytiques kählériennes :

**Conjecture 1.** — *Pour toute surface analytique kählérienne compacte lisse  $S$  et tout fibré inversible  $L$  sur  $S$  on a :*

$$\sum_{n=0}^{\infty} h^{p,q}(S^{[n]}, L_n) x^p y^q t^n = \prod_{k=1}^{\infty} \prod_{p=0}^2 \prod_{q=0}^2 \left( \frac{1}{1 - (-1)^{p+q} x^{p+k-1} y^{q+k-1} t^k} \right)^{(-1)^{p+q} h^{p,q}(S, L)}$$

**2.4. Cas particulier des surfaces K3.** — Si  $S$  est une surface K3, le corollaire 1 dit que les automorphismes *non naturels*  $\text{Aut}(S^{[n]}) \setminus \text{Aut}(S)$  sont au plus dénombrables. On en connaît cependant très peu, il semble que le seul exemple connu soit celui-ci : soit  $S \in \mathbb{P}_{\mathbb{C}}^3$  une quartique générique ne contenant aucune droite. Pour tout point  $\xi \in S^{[2]}$  il existe une unique droite de  $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^3$  contenant  $\xi \subset S$ , qui recoupe  $S$  en deux autres points, ce qui définit une involution birationnelle sur  $S^{[2]}$  qui s'étend en un isomorphisme (voir [2]).

Beauville [1] montre que si  $S$  est une surface simplement connexe, de groupe de Picard nul et de groupe d'automorphismes trivial, alors pour tout  $n$  le groupe  $\text{Aut}(S^{[n]})$  est aussi trivial. Ce résultat se généralise :

**Proposition 2.** — *Si  $S$  est simplement connexe, de groupe de Picard nul et telle que  $h^0(S, T_S) = 0$ , alors  $\text{Aut}(S) \cong \text{Aut}(S^{[n]})$  pour tout  $n \geq 1$ .*

La condition de non existence de sections globales non nulles du fibré tangent signifie que le groupe  $\text{Aut}(S)$  est totalement discontinu. S'il est en particulier trivial, nous retrouvons le théorème de Beauville cité ci-dessus.

*Démonstration.* — La démonstration reprend au début celle de Beauville ([1, §5]) ; nous en rappelons les arguments pour faciliter la lecture.

Soit  $n \geq 2$  et  $f$  un automorphisme de  $S^{[n]}$ . Il induit un automorphisme de son groupe de Picard. Puisque  $\text{Pic}(S) = \{0\}$ ,  $\text{Pic}(S^{[n]})$  est engendré par un fibré  $L$  tel que  $L^{\otimes 2} \cong \mathcal{O}(E)$ , donc  $f$  préserve  $E$  (car  $E$  est rigide).  $f$  induit donc un automorphisme de  $S^{[n]} \setminus E$ . La composée du quotient par le groupe symétrique  $S^n \setminus \Delta \rightarrow S^{(n)} \setminus D$  avec l'isomorphisme  $S^{(n)} \setminus D \cong S^{[n]} \setminus E$  est un revêtement fini et non ramifié  $\pi : S^n \setminus \Delta \rightarrow S^{[n]} \setminus E$ . Puisque  $S$  est simplement connexe est que  $\Delta$  est de codimension 2 dans  $S^n$ ,  $S^n \setminus \Delta$  est aussi simplement connexe donc  $\pi$  est le revêtement universel de  $S^{[n]} \setminus E$ . L'automorphisme  $f$  s'y remonte donc en un automorphisme  $\bar{f}$  de  $S^n \setminus \Delta$ .

Soient  $s_1, \dots, s_n$  des points de  $S$  deux à deux distincts. Considérons le morphisme composé  $S \setminus \{s_2, \dots, s_n\} \rightarrow S^n \setminus \Delta \rightarrow S^n \setminus \Delta$  défini par  $x_1 \mapsto \bar{f}(x_1, s_2, \dots, s_n)$ . L'une au moins de ses composées à droite avec les projections  $p_1, \dots, p_n$  sur les différents facteurs est non constante puisque  $\bar{f}$  est injective, et quitte à permuter les variables on peut supposer que  $p_1$  a cette propriété. L'application rationnelle  $x_1 \mapsto p_1 \circ \bar{f}(x_1, s_2, \dots, s_n)$  étant non constante, c'est en fait un isomorphisme de  $S$  ([1, Lemme 1]) qui dépend continûment de  $s_2, \dots, s_n$  dans un voisinage de ces points où cette composée reste un isomorphisme. Mais le groupe d'automorphismes de  $S$  étant totalement discontinu, cet isomorphisme est indépendant localement de  $s_2, \dots, s_n$  : notons-le  $\phi_1(x_1)$ . Continuons avec la deuxième coordonnée en considérant maintenant la composée  $x_2 \mapsto \bar{f}(s_1, x_2, s_3, \dots, s_n)$ . La première projection sur  $S$  est constante de valeur  $\phi_1(s_1)$ , donc l'une des projections  $p_2, \dots, p_n$  est non constante, et nous pouvons supposer qu'il s'agit de  $p_2$ . Comme précédemment,  $x_2 \mapsto p_2 \circ \bar{f}(s_1, x_2, s_3, \dots, s_n)$  est en fait un isomorphisme de  $S$  qui ne dépend pas de  $s_1, s_3, \dots, s_n$  dans un voisinage de ces points, et que nous notons  $\phi_2(x_2)$ . On traite ainsi de proche en proche toutes les coordonnées. Finalement, dans un voisinage de  $(s_1, \dots, s_n) \in S^n \setminus \Delta$  l'automorphisme

$\bar{f}$  coïncide avec l'application  $(x_1, \dots, x_n) \mapsto (\phi_1(x_1), \dots, \phi_n(x_n))$ . Puisque  $S^n \setminus \Delta$  est connexe, ces deux fonctions sont égales en tout point.

Ceci fait, l'automorphisme  $\bar{f}(x_1, \dots, x_n) = (\phi_1(x_1), \dots, \phi_n(x_n))$  de  $S^n \setminus \Delta$  doit redescendre à  $S^{(n)} \setminus D$  pour donner  $f$ . Le revêtement étant galoisien de groupe  $\mathfrak{S}_n$ , c'est le cas si et seulement s'il existe un isomorphisme  $\psi$  du groupe  $\mathfrak{S}_n$  tel que  $\bar{f}(\sigma \cdot (x_1, \dots, x_n)) = \psi(\sigma) \cdot (\phi_1(x_1), \dots, \phi_n(x_n))$  pour tout  $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ . Si  $\psi$  est différent de l'identité, prenons  $\sigma$  tel que  $\psi(\sigma) \neq \sigma$  et trois entiers  $i, j, k$  avec  $\sigma(i) = j$  et  $k = \psi(\sigma)(i) \neq j$ . La condition d'équivariance dit que  $\phi_i(x_j) = \phi_k(x_k)$  pour tout  $x_j \neq x_k$  et contredit le fait que  $\bar{f}$  est à valeurs dans  $S^n \setminus \Delta$ . Donc  $\psi$  est l'identité et la condition d'équivariance dit que pour tous indices  $i, j$  on a  $\phi_i(x_i) = \phi_j(x_j)$  pour  $x_i \neq x_j$ . Cette égalité reste vraie pour  $x_i = x_j$  donc  $\phi_i = \phi_j$  pour tous  $i, j$ . En notant  $\phi$  cet isomorphisme de  $S$ , on a donc  $\bar{f}(x_1, \dots, x_n) = (\phi(x_1), \dots, \phi(x_n))$  et  $\bar{f}$  redescend. L'isomorphisme  $f$  de  $S^{[n]}$  de départ provient donc de l'isomorphisme  $\phi$  de  $S$ . Le morphisme injectif de groupes de Lie  $\text{Aut}(S) \rightarrow \text{Aut}(S^{[n]})$  est donc aussi surjectif, donc c'est un isomorphisme puisque  $\text{Aut}(S)$  est localement compact et dénombrable à l'infini [14, 1.10 Corollaire 1].  $\square$

Les hypothèses de cette proposition ne sont remplies que par des surfaces K3 non algébriques, auquel cas le groupe de Picard est génériquement nul, donc on a immédiatement :

**Corollaire 2.** — *Les automorphismes de l'espace de Douady de points sur une surface K3 générique sont tous naturels.*

**Remarque 2.** — *En utilisant le théorème de Torelli global, McMullen [22] construit des surfaces K3 non algébriques de groupe de Picard nul ayant un groupe d'automorphismes d'ordre infini.*

### 3. Etude cohomologique

**3.1. Préliminaires sur les traces.** — Soit  $V$  un espace vectoriel de dimension finie sur  $\mathbb{C}$  et  $\mathfrak{f} \in \text{End}(V)$ . Notons  $\text{trace}_V(\mathfrak{f}) \in \mathbb{C}$  sa trace et  $\chi_V(\mathfrak{f}) := \det(\mathfrak{f} - X \text{id}_V) \in \mathbb{C}[X]$  son polynôme caractéristique. Si  $W$  et  $\mathfrak{g} \in \text{End}(W)$  sont donnés similairement, on a les formules :

$$(1) \quad \begin{aligned} \text{trace}_{V \oplus W}(\mathfrak{f} \oplus \mathfrak{g}) &= \text{trace}_V(\mathfrak{f}) + \text{trace}_W(\mathfrak{g}) \in \mathbb{C}, \\ \text{trace}_{V \otimes W}(\mathfrak{f} \otimes \mathfrak{g}) &= \text{trace}_V(\mathfrak{f}) \cdot \text{trace}_W(\mathfrak{g}) \in \mathbb{C}. \end{aligned}$$

Supposons maintenant que  $V = \bigoplus_{n=0}^{+\infty} V_n$  est un espace vectoriel gradué, chaque  $V_n$  étant de dimension finie, et que  $\mathfrak{f} = (\mathfrak{f}_n)_{n \geq 0}$  avec  $\mathfrak{f}_n \in \text{End}(V_n)$ . On définit sa trace à valeurs dans  $\mathbb{C}[[q]]$  par :

$$\text{trace}_V(\mathfrak{f}) := \sum_{n=0}^{+\infty} \text{trace}_{V_n}(\mathfrak{f}_n) q^n.$$

Si  $W = \bigoplus_{n=0}^{+\infty} W_n$  et  $\mathfrak{g} = (\mathfrak{g}_n)_{n \geq 0}$  sont donnés similairement, les formules (1) s'étendent, à valeurs cette fois dans  $\mathbb{C}[[q]]$ .

Soit  $E$  un espace vectoriel de dimension finie sur  $\mathbb{C}$ . Notons son algèbre tensorielle  $T(E) := \bigoplus_{n=0}^{+\infty} T^n(E)$ , son algèbre symétrique  $S(E) := \bigoplus_{n=0}^{+\infty} S^n(E)$  et son algèbre alternée  $\Lambda(E) := \bigoplus_{n=0}^{+\infty} \Lambda^n(E)$ . Pour  $f \in \text{End}(E)$ , on calcule aisément les traces des endomorphismes induits sur ces trois algèbres :

$$(2) \quad \begin{aligned} \text{trace}_{T(E)}(T(f)) &= \frac{1}{1 - \text{trace}_E(f)q} \in \mathbb{C}[[q]], \\ \text{trace}_{S(E)}(S(f)) &= \frac{1}{(-q)^{\dim E} \chi_E(f)(1/q)} \in \mathbb{C}[[q]], \\ \text{trace}_{\Lambda(E)}(\Lambda(f)) &= q^{\dim E} \chi_E(f)(-1/q) \in \mathbb{C}[q]. \end{aligned}$$

En effet, il suffit de considérer le cas où  $f$  est diagonalisable et conclure par densité, et sous cette hypothèse, si l'on note  $\chi_E(f) = (-1)^{\dim E} \prod_{i=1}^{\dim E} (X - \lambda_i)$ , alors :

$$\begin{aligned} (-q)^{\dim E} \chi_E(f)(1/q) &= \prod_{i=1}^{\dim E} (1 - \lambda_i q) \\ q^{\dim E} \chi_E(f)(-1/q) &= \prod_{i=1}^{\dim E} (1 + \lambda_i q). \end{aligned}$$

Soit  $A = \bigoplus_{i=0}^d A^i$  un espace vectoriel gradué de dimension finie sur  $\mathbb{C}$  et  $f = (f_i)_{i=0, \dots, d}$  avec  $f_i \in \text{End}(A^i)$ . Posons :

$$\begin{aligned} \text{trace}_A(f) &= \sum_{i=0}^d \text{trace}_{A^i}(f_i) t^i \in \mathbb{C}[t], \\ \chi_A(f) &= \prod_{i=0}^d t^{i \dim A^i} \chi_{A^i}(f_i)(X/t^i) \in \mathbb{C}[t][X]. \end{aligned}$$

Les algèbres  $T(A)$ ,  $S(A)$  et  $\Lambda(A)$  sont munies d'une double graduation en poids  $n$  et degré  $i$ , l'algèbre  $A$  étant prise de poids 1. Les formules (2) s'étendent alors, à valeurs dans  $\mathbb{C}[t][[q]]$  et  $\mathbb{C}[t][q]$  respectivement. En effet, lorsque  $f$  est diagonalisable, le polynôme caractéristique ainsi défini tient compte du degré des vecteurs propres en insérant  $t^i$  devant les valeurs propres  $\lambda_{i,j}$  de  $f_i$  :

$$\chi_A(f) = \prod_{i=0}^d (-1)^{\dim A^i} \prod_{j=1}^{\dim A^i} (X - \lambda_{i,j} t^i).$$

**3.2. Trace d'un opérateur naturel sur un espace de Fock.** — Soit  $A$  une super-algèbre de Frobenius graduée de dimension finie sur  $\mathbb{C}$ , notée  $A = \bigoplus_{i=0}^{4n} A^i$ . Elle est munie :

- d'une super-structure (*i.e.* graduation par  $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ ) définie par la décomposition  $A^{\text{pair}} := \bigoplus_{i=0}^{2n} A^{2i}$  et  $A^{\text{impair}} := \bigoplus_{i=0}^{2n-1} A^{2i+1}$  ;
- d'une multiplication graduée commutative et associative  $A \otimes A \rightarrow A$  : si  $a \in A^i$  et  $b \in A^j$ , alors  $a \cdot b \in A^{i+j}$  et  $a \cdot b = (-1)^{i \cdot j} b \cdot a$  ;



- d’une forme linéaire  $T: A \rightarrow \mathbb{C}$  de degré  $-4n$  telle que la forme bilinéaire super-symétrique  $\langle a, b \rangle := T(a \cdot b)$  est non dégénérée : la super-symétrie s’écrit  $\langle a, b \rangle = (-1)^{|a| \cdot |b|} \langle b, a \rangle$ , où  $|\cdot|$  désigne le degré d’un élément homogène.

Considérons l’algèbre de Heisenberg  $\mathfrak{h}_A := A[t, t^{-1}] \oplus \mathbb{C}\kappa$  où le crochet de Lie est défini par :

$$\begin{aligned} [\kappa, -] &= 0 \text{ } (\kappa \text{ est central}), \\ [a \otimes \phi, b \otimes \psi] &= -\text{res}_{t=0}(\phi \, d\psi) \cdot \langle a, b \rangle \cdot \kappa, \end{aligned}$$

pour  $a, b \in A$  et  $\phi, \psi \in \mathbb{C}[t, t^{-1}]$ . Ce crochet est super-antisymétrique au sens où l’on a :  $[a \otimes \phi, b \otimes \psi] = -(-1)^{|a| \cdot |b|} [b \otimes \psi, a \otimes \phi]$ . Pour  $a \in A$  et  $n \in \mathbb{Z}$ , notons  $a_n := a \otimes t^n$ . Le crochet de Lie est entièrement caractérisé par les relations :

$$\begin{aligned} [\kappa, a_n] &= 0, \\ [a_n, b_m] &= n \cdot \delta_{n, -m} \cdot \langle a, b \rangle \cdot \kappa \end{aligned}$$

où  $\delta$  désigne le symbole de Kronecker.

Soit  $I \subset U(\mathfrak{h}_A)$  l’idéal à gauche dans l’algèbre enveloppante de  $\mathfrak{h}_A$  engendré par les éléments de la forme  $a_n$  pour  $n \leq 0$  et l’élément  $\kappa - 1$ . L’espace de Fock est par définition le quotient (à droite)  $\mathbb{F}(A) := U(\mathfrak{h}_A)/I$ . C’est une représentation de  $\mathfrak{h}_A$ , engendrée par la classe notée  $|0\rangle$  de  $1 \in U(\mathfrak{h}_A)$ . Notons, pour cette représentation  $\mathfrak{h}_A \rightarrow \text{End}(\mathbb{F}(A))$ ,  $\mathfrak{q}_n(a)$  l’endomorphisme correspondant à l’élément  $a_n$ . On a donc :

$$\begin{aligned} \mathfrak{q}_n(a)|0\rangle &= 0 \text{ si } n \leq 0, \\ \kappa|0\rangle &= |0\rangle, \\ [\mathfrak{q}_n(a), \mathfrak{q}_m(b)] &= \mathfrak{q}_n(a) \circ \mathfrak{q}_m(b) - (-1)^{|a| \cdot |b|} \mathfrak{q}_m(b) \circ \mathfrak{q}_n(a) \\ &= n\delta_{n, -m} \cdot \langle a, b \rangle \cdot \text{id}_{\mathbb{F}(A)}. \end{aligned}$$

On constate aisément que cette représentation est irréductible (voir [20]).

On munit  $\mathbb{F}(A)$  d’une double graduation par poids et degré en déclarant qu’un endomorphisme  $\mathfrak{q}_n(a)$  est de poids  $n$  et de degré  $2(n-1) + |a|$ , et que  $|0\rangle$  est de poids et degré nuls. La décomposition en poids est alors notée  $\mathbb{F}(A) = \bigoplus_{n=0}^{+\infty} A^{[n]}$ .

**Remarque 3.** — *Lehn et Sorger [21] ont construit sur  $A^{[n]}$  une structure de super-algèbre de Frobenius graduée. Nous n’utiliserons pas cette structure supplémentaire dans la suite.*

Pour  $n, m \geq 0$ , on a  $\mathfrak{q}_n(a) \circ \mathfrak{q}_m(b) = (-1)^{|a| \cdot |b|} \mathfrak{q}_m(b) \circ \mathfrak{q}_n(a)$  donc l’algèbre  $\mathbb{F}(A)$  est symétrique en ce qui concerne  $A^{\text{pair}}$  et antisymétrique pour  $A^{\text{impair}}$ . En notant  $Aq^m$  l’algèbre  $A$  considérée de poids  $m$  (au lieu de 1) on a donc :

$$\mathbb{F}(A) \cong S^* \left( \bigoplus_{m \geq 1} Aq^m \right) \cong \bigotimes_{m \geq 1} S(A^{\text{pair}} q^m) \otimes \bigotimes_{m \geq 1} \Lambda(A^{\text{impair}} q^m)$$

où  $S^*$  désigne le produit super-symétrique (i.e. le produit symétrique sur un  $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ -espace vectoriel).

Soit  $f = (f_i)_{i=0,\dots,4n}$  avec  $f_i \in \text{End}(A^i)$  un endomorphisme de  $A$ . Il induit un endomorphisme de  $\mathbb{F}(A)$  noté  $\mathbb{F}(f)$ , caractérisé par la formule :

$$\mathbb{F}(f)(q_{\lambda_1}(a_1) \circ \dots \circ q_{\lambda_k}(a_k)|0\rangle) = q_{\lambda_1}(f(a_1)) \circ \dots \circ q_{\lambda_k}(f(a_k))|0\rangle$$

où  $f(a_i)$  signifie bien sûr  $f_{|a_i|}(a_i)$ . Les formules de trace précédentes permettent le calcul de la trace de  $\mathbb{F}(f)$  :

**Proposition 3.** —

$$\text{trace}_{\mathbb{F}(A)}(\mathbb{F}(f)) = \prod_{m \geq 1} \frac{q^{m \cdot \dim A^{\text{impair}}} \chi_{A^{\text{impair}}}(f)(-1/q^m)}{(-q^m)^{\dim A^{\text{pair}}} \chi_{A^{\text{pair}}}(f)(1/q^m)} \in \mathbb{C}[t][[q]].$$

Remarquons que si  $f$  est l'identité, on retrouve la formule déjà connue de la série de Poincaré de l'espace de Fock.

**3.3. Rappels sur la cohomologie de  $S^{[\bullet]}$ .** — Les résultats rappelés ici sont dus à Göttsche [15] et Nakajima [23] pour les surfaces algébriques, étendus aux surfaces analytiques par de Cataldo & Migliorini [6].

Soit  $H^*(S^{[n]}) := \bigoplus_{i=0}^{4n} H^i(S^{[n]})$  l'algèbre de cohomologie singulière à coefficients complexes de  $S^{[n]}$ , la structure d'anneau étant donnée par le cup-produit. L'algèbre de cohomologie totale des espaces de Douady de points sur  $S$  est  $\mathbb{H}_S := \bigoplus_{n \geq 0} H^*(S^{[n]})$ . L'unité de  $H^*(S^{[0]}) \cong \mathbb{C}$  est appelée le *vacuum* et est notée  $|0\rangle$ .

L'espace  $\mathbb{H}_S$  est muni d'une double graduation : les éléments de  $H^i(S^{[n]})$  sont dits de bidegré  $(n, i)$  où  $n$  est le *poids conforme* et  $i$  le *degré cohomologique*. Un opérateur linéaire  $\mathfrak{g} \in \text{End}(\mathbb{H}_S)$  est dit *homogène* de bidegré  $(u, v)$  s'il vérifie pour tous  $n, i$  :  $\mathfrak{g}(H^i(S^{[n]})) \subset H^{i+v}(S^{[n+u]})$ . On notera  $v =: |\mathfrak{g}|$  le degré cohomologique de  $\mathfrak{g}$ . Le commutateur de deux opérateurs linéaires homogènes  $\mathfrak{g}_1, \mathfrak{g}_2$  est défini par  $[\mathfrak{g}_1, \mathfrak{g}_2] = \mathfrak{g}_1 \circ \mathfrak{g}_2 - (-1)^{|\mathfrak{g}_1| \cdot |\mathfrak{g}_2|} \mathfrak{g}_2 \circ \mathfrak{g}_1$ .

Le produit d'intersection sur  $H^*(S^{[n]})$  défini par  $\langle \alpha, \beta \rangle_n := \int_{S^{[n]}} \alpha \beta$  s'étend naturellement en une forme bilinéaire symétrique non dégénérée notée  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  sur  $\mathbb{H}_S$ . Tout opérateur linéaire homogène  $\mathfrak{g} \in \text{End}(\mathbb{H}_S)$  admet donc un *adjoint* noté  $\mathfrak{g}^\dagger$  caractérisé par la relation  $\langle \mathfrak{g}(\alpha), \beta \rangle = (-1)^{|\mathfrak{g}| \cdot |\alpha|} \langle \alpha, \mathfrak{g}^\dagger(\beta) \rangle$ .

Soit  $\mathfrak{h}_{H^*(S)} := H^*(S)[t, t^{-1}] \oplus \mathbb{C}c$  munie comme précédemment du crochet de Lie pour lequel  $c$  est central et  $[\alpha f(t), \beta g(t)] = \int_S \alpha \beta \cdot \text{res}_t g df \cdot c$  pour  $\alpha, \beta \in H^*(S)$  et  $f, g \in \mathbb{C}[t, t^{-1}]$ . On construit géométriquement une représentation irréductible  $\mathfrak{h}_{H^*(S)} \rightarrow \text{End}(\mathbb{H}_S)$  au moyen des opérateurs de Nakajima dont nous rappelons la définition pour un usage ultérieur.

Pour tous  $n \geq 0$  et  $k \geq 1$ , soit  $\Sigma^{[n, n+k]} \subset S^{[n]} \times S \times S^{[n+k]}$  la sous-variété dont les points sont les triplets  $(\xi, x, \xi')$  tels que  $\xi \subset \xi'$  et le support de  $\mathcal{I}_\xi / \mathcal{I}_{\xi'}$  est  $\{x\}$ , où  $\mathcal{I}_\xi$  désigne le faisceau d'idéaux du sous-espace  $\xi$  de  $S$ . Notons les différentes projections sur les facteurs ainsi :

$$\begin{array}{ccccc} & S^{[n]} \times S \times S^{[n+k]} & & & \\ & \swarrow \varphi \quad \downarrow \rho \quad \searrow \psi & & & \\ S^{[n]} & & S & & S^{[n+k]} \end{array}$$

Les opérateurs de Nakajima  $\mathbf{q}_k : H^*(S) \rightarrow \text{End}(\mathbb{H}_S)$  pour  $k \in \mathbb{Z}$  sont définis ainsi : pour tous  $k \geq 0$ ,  $\alpha \in H^*(S)$  et  $x \in H^*(S^{[n]})$  on pose

$$\mathbf{q}_k(\alpha)(x) := \psi_* \left( \varphi^*(x) \cdot \rho^*(\alpha) \cdot \left[ \Sigma^{[n, n+k]} \right] \right)$$

où  $\psi_*$  désigne l'image directe de cohomologie singulière définie à partir de l'image directe d'homologie en utilisant la dualité de Poincaré et  $\left[ \Sigma^{[n, n+k]} \right]$  désigne la classe fondamentale cohomologique de la sous-variété. Les opérateurs d'indice négatif sont ensuite définis par adjonction  $\mathbf{q}_{-k}(\alpha) := (-1)^k \mathbf{q}_k(\alpha)^\dagger$  pour  $k > 0$ . On convient de poser  $\mathbf{q}_0 = 0$ . Les opérateurs  $\mathbf{q}_k$  sont appelés *opérateurs de création* si  $k \geq 1$  et *opérateurs d'annihilation* si  $k \leq -1$ . Le fait que ces opérateurs fournissent une représentation de  $\mathfrak{h}_{H^*(S)}$  résulte du théorème de Nakajima [23] donnant leur règle de commutation :  $[\mathbf{q}_i(\alpha), \mathbf{q}_j(\beta)] = i \cdot \delta_{i+j, 0} \cdot \int_S \alpha \beta \cdot \text{id}_{\mathbb{H}_S}$ . Le fait que la représentation  $\mathfrak{h}_{H^*(S)} \rightarrow \text{End}(\mathbb{H}_S)$  soit irréductible résulte de l'égalité entre la série de Poincaré de  $\mathbb{H}_S$  et celle de la représentation irréductible de  $\mathfrak{h}_{H^*(S)}$  donnée par l'espace de Fock. Autrement dit,  $\mathbb{H}_S \cong \mathbb{F}(H^*(S))$  comme représentations de  $\mathfrak{h}_{H^*(S)}$ , ce qui se traduit par le fait que l'espace  $\mathbb{H}_S$  admet une base constituée des vecteurs de la forme :

$$\mathbf{q}_{n_1}(u_1) \cdots \mathbf{q}_{n_k}(u_k) |0\rangle$$

pour  $k \geq 0$  et  $n_i \geq 1$ , où les  $u_i$  parcourent une base de  $H^*(S)$  (en faisant attention aux signes car si un tel vecteur contient deux fois le même  $u_j$  de degré cohomologique impair, alors ce vecteur est nul en raison de l'intervention des signes dans la règle de commutation des opérateurs de Nakajima).

**3.4. Action des automorphismes naturels sur la cohomologie.** — Soit  $f \in \text{Aut}(S)$  et  $(f_n)_{n \geq 0}$  l'automorphisme naturel de  $S^{[\bullet]}$  induit (avec  $f_n = f^{[n]}$ ). Cela induit un opérateur linéaire sur  $\mathbb{H}_S$  de poids conforme nul dont les composantes sont notées  $f_n^* \in \text{End}(H^*(S^{[n]}))$ . Notons  $f^*$  l'opérateur sur  $\mathbb{H}_S$  tel que  $f_{[H^*(S^{[n]})]}^* = f_n^*$ , avec  $f_1^* = f^*$ . La relation entre  $f^*$  et les opérateurs de Nakajima est donnée par la formule suivante :

**Lemme 2.** — Pour tous  $k \in \mathbb{Z}$  et  $\alpha \in H^*(S)$  on a :

$$f^* \circ \mathbf{q}_k(\alpha) = \mathbf{q}_k(f^* \alpha) \circ f^*.$$

*Démonstration.* — Commençons par le cas  $k \geq 1$ . Soit  $n \geq 0$  et  $x \in H^*(S^{[n]})$ . On calcule :

$$f_{n+k}^* \mathbf{q}_k(\alpha)x = f_{n+k}^* \psi_* \left( \varphi^* x \cdot \rho^* \alpha \cdot \left[ \Sigma^{[n, n+k]} \right] \right).$$

Le diagramme suivant est commutatif :

$$\begin{array}{ccc} S^{[n]} \times S \times S^{[n+k]} & \xrightarrow{f_n \times f \times f_{n+k}} & S^{[n]} \times S \times S^{[n+k]} \\ \downarrow \psi & & \downarrow \psi \\ S^{[n+k]} & \xrightarrow{f_{n+k}} & S^{[n+k]} \end{array}$$

et on a la formule :  $f_{n+k}^* \circ \psi_* = \psi_* \circ (f_n \times f \times f_{n+k})^*$ . Observons aussi que  $\varphi \circ (f_n \times f \times f_{n+k}) = f_n \circ \varphi$  et  $\rho \circ (f_n \times f \times f_{n+k}) = f \circ \rho$  et nous obtenons :

$$f_{n+k}^* \mathfrak{q}_k(\alpha)x = \psi_* \left( \varphi^* f_n^* x \cdot \rho^* f^* \alpha \cdot \left[ (f_n \times f \times f_{n+k})^{-1}(\Sigma^{[n,n+k]}) \right] \right).$$

Puisque  $(f_n)_{n \geq 0}$  est naturel,  $(f_n \times f \times f_{n+k})^{-1}(\Sigma^{[n,n+k]}) = \Sigma^{[n,n+k]}$  donc finalement :

$$\begin{aligned} f_{n+k}^* \mathfrak{q}_k(\alpha)x &= \psi_* \left( \varphi^* f_n^* x \cdot \rho^* f^* \alpha \cdot \left[ \Sigma^{[n,n+k]} \right] \right) \\ &= \mathfrak{q}_k(f^* \alpha) f_n^*(x). \end{aligned}$$

Pour traiter le cas  $k < 0$ , procédons par adjonction. Pour  $k > 0$ , nous avons obtenu la formule  $f^* \circ \mathfrak{q}_k(\alpha) = \mathfrak{q}_k(f^* \alpha) \circ f^*$ . Par adjonction nous obtenons alors :

$$\mathfrak{q}_{-k}(\alpha) \circ (f^*)^\dagger = (f^*)^\dagger \circ \mathfrak{q}_{-k}(f^* \alpha).$$

Puisque  $(f^*)^\dagger = (f^{-1})^*$ , on obtient la formule indiquée.  $\square$

Ce lemme implique que pour toute classe  $\mathfrak{q}_{n_1}(u_1) \cdots \mathfrak{q}_{n_k}(u_k)|0\rangle \in H^*(S^{[n]})$  on a :

$$f_n^* (\mathfrak{q}_{n_1}(u_1) \cdots \mathfrak{q}_{n_k}(u_k)|0\rangle) = \mathfrak{q}_{n_1}(f^* u_1) \cdots \mathfrak{q}_{n_k}(f^* u_k)|0\rangle.$$

Par ailleurs, partant de l'automorphisme  $f$  de  $S$ , si nous notons  $\mathfrak{f} := f^*$  l'endomorphisme de  $H^*(S)$  induit par  $f$ , nous pouvons étendre  $\mathfrak{f}$  en un endomorphisme de  $\mathbb{H}_S$  en utilisant la base de la cohomologie donnée par les classes formées d'opérateurs de Nakajima. Nous définissons ainsi un opérateur linéaire  $\mathfrak{f}^{[n]}$  pour tout  $n$  par :

$$\mathfrak{f}^{[n]} (\mathfrak{q}_{n_1}(u_1) \cdots \mathfrak{q}_{n_k}(u_k)|0\rangle) := \mathfrak{q}_{n_1}(\mathfrak{f} u_1) \cdots \mathfrak{q}_{n_k}(\mathfrak{f} u_k)|0\rangle$$

Avec cette définition, on obtient la formule attendue  $\mathfrak{f}^{[n]} = f_n^*$ , ou de façon plus symétrique :  $(f^*)^{[n]} = (f^{[n]})^*$ , ou encore  $f^* = \mathbb{F}(f^*)$ .

**Remarque 4.** — Soit  $f \in \text{Aut}(S)$ . Les nombres de Lefschetz de l'automorphisme naturel induit sur  $S^{[\bullet]}$  se calculent donc avec la proposition 3.

Pour toute variété analytique connexe, compacte et lisse  $X$  et tout automorphisme  $f$  de  $X$ , on note  $\rho(f)$  le rayon spectral de  $f^*$  sur  $H^*(X, \mathbb{C})$  et  $e(f) := \log \rho(f)$  son entropie.

**Corollaire 3.** — Soit  $f \in \text{Aut}(S)$ . Pour tout  $n \geq 1$  on a  $e(f^{[n]}) = n \cdot e(f)$ .

*Démonstration.* — Il suffit de le montrer lorsque  $f^*$  est diagonalisable. Si  $u_1, \dots, u_k$  est une base de diagonalisation de  $f^*$ , de valeurs propres  $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ , on a :

$$(f^{[n]})^* (\mathfrak{q}_{n_1}(u_{i_1}) \cdots \mathfrak{q}_{n_k}(u_{i_k})|0\rangle) = \left( \prod_{j=1}^k \lambda_{i_j}^n \right) \mathfrak{q}_{n_1}(u_{i_1}) \cdots \mathfrak{q}_{n_k}(u_{i_k})|0\rangle$$

donc  $\rho(f^{[n]}) = \rho(f)^n$  puis  $e(f^{[n]}) = n \cdot e(f)$ .  $\square$

#### 4. Etude des points fixes

**4.1. Calcul différentiel sur l'espace de Douady de points.** — Soit  $X$  un espace analytique,  $x \in X$  et  $\mathfrak{m}_{X,x} \subset \mathcal{O}_{X,x}$  l'idéal maximal des germes de fonctions holomorphes s'annulant en  $x$ . L'espace tangent de  $X$  en  $x$  est par définition :

$$T_x X := \text{Hom}_{\mathbb{C}}(\mathfrak{m}_{X,x}/\mathfrak{m}_{X,x}^2, \mathbb{C}).$$

Soit  $\mathcal{D}$  l'espace analytique réduit au point muni de l'algèbre des nombres duaux  $\mathbb{C}[\varepsilon]/\varepsilon^2$  et notons  $X(\mathcal{D})_x$  l'ensemble des morphismes  $t: \mathcal{D} \rightarrow X$  envoyant le point de  $\mathcal{D}$  sur  $x$ . On a un isomorphisme d'espaces vectoriels sur  $K$  :

$$(3) \quad T_x X \cong X(\mathcal{D})_x.$$

Soit  $Y$  un autre espace analytique,  $f: X \rightarrow Y$  un morphisme et  $y := f(x)$ . Notons  $f_y^\#: \mathcal{O}_{Y,y} \rightarrow \mathcal{O}_{X,x}$  le morphisme d'algèbres locales induit. Puisque  $f_y^\#(\mathfrak{m}_{Y,y}) \subset \mathfrak{m}_{X,x}$ , il induit une application linéaire  $\overline{f_y^\#}: \mathfrak{m}_{Y,y}/\mathfrak{m}_{Y,y}^2 \rightarrow \mathfrak{m}_{X,x}/\mathfrak{m}_{X,x}^2$  dont le dual est par définition l'application tangente à  $f$  en  $x$

$$T_x f: T_x X \rightarrow T_y Y, \quad (T_x f)(v) = v \circ \overline{f_y^\#}.$$

Si l'on utilise la description (3) de l'espace tangent, il est facile de voir que  $T_x f$  est donnée par la formule

$$(4) \quad (T_x f)(t) = f \circ t.$$

Si  $X = S^{[n]}$  est l'espace de Douady représentant le foncteur des familles plates de sous-espaces analytiques de  $S$  de dimension nulle et de longueur  $n$ , on sait qu'en un point  $\xi \in X$  correspondant au sous-espace analytique  $\xi \subset S$  de faisceau d'idéaux  $\mathcal{I}_\xi \subset \mathcal{O}_S$  on a

$$(5) \quad T_\xi X \cong \text{Hom}_{\mathcal{O}_S}(\mathcal{I}_\xi, \mathcal{O}_S/\mathcal{I}_\xi).$$

Si  $\Sigma$  est une autre surface analytique,  $Y = \Sigma^{[n]}$  et  $f: S \rightarrow \Sigma$  est un isomorphisme, l'isomorphisme  $f^{[n]}: X \rightarrow Y$  est donné fonctoriellement ainsi : si  $T$  est un espace analytique et  $\mathcal{Z} \subset S \times T$  une famille de sous-espaces analytiques de  $S$  de dimension nulle et de longueur  $n$ , plate sur  $T$ , alors  $f^{[n]}(\mathcal{Z}) = (f \times \text{id}_T)(\mathcal{Z}) \in Y(T)$ . La description (3) de l'espace tangent montre que, de ce point de vue, en notant  $\zeta := f(\xi)$ ,

$$(6) \quad (T_\xi f^{[n]})(\mathcal{Z}) = (f \times \text{id}_{\mathcal{D}})(\mathcal{Z}) \in T_\zeta Y,$$

pour tout famille plate  $\mathcal{Z} \subset S \times \mathcal{D}$  telle que  $\mathcal{Z}|_{S \times *} = \xi$ . Avec la description (5), on calcule que  $T_\xi f^{[n]}: \text{Hom}_{\mathcal{O}_S}(\mathcal{I}_\xi, \mathcal{O}_S/\mathcal{I}_\xi) \rightarrow \text{Hom}_{\mathcal{O}_\Sigma}(\mathcal{I}_\zeta, \mathcal{O}_\Sigma/\mathcal{I}_\zeta)$  est donnée par la formule

$$(7) \quad (T_\xi f^{[n]})(\phi) = (f^\#)^{-1} \circ f_*(\phi) \circ f_{|\mathcal{I}_\xi}^\#.$$

Précisément, pour  $\phi: \mathcal{I}_\xi \rightarrow \mathcal{O}_S/\mathcal{I}_\xi$ ,  $(T_\xi f^{[n]})(\phi)$  est la composée

$$(8) \quad \mathcal{I}_\zeta \xrightarrow{f^\#} f_* \mathcal{I}_\xi \xrightarrow{f_*(\phi)} f_*(\mathcal{O}_S/\mathcal{I}_\xi) \xrightarrow{(a)} f_* \mathcal{O}_S / f_* \mathcal{I}_\xi \xrightarrow{(f^\#)^{-1}} \mathcal{O}_\Sigma/\mathcal{I}_\zeta$$

où (a) est dû au fait que  $f$  est un morphisme affine (puisque c'est un isomorphisme), donc  $R^1 f_* \mathcal{I}_\xi = 0$ . En effet, l'isomorphisme (5) se construit par recollement sur des

ouverts affines, donc on peut supposer que  $S$  et  $\Sigma$  sont affines. Soit  $A := \mathcal{O}(S)$ ,  $B := \mathcal{O}(\Sigma)$ ,  $I := \mathcal{I}_\xi \subset A$  et  $J := \mathcal{I}_\zeta \subset B$ . L'idéal  $I(\mathcal{Z})$  de  $\mathcal{Z}$  (dans (6)) est engendré par des éléments de la forme  $\alpha_i + \varepsilon\beta_i$  avec  $\alpha_i, \beta_i \in A$  où les  $\alpha_i$  engendrent l'idéal  $I$  et l'isomorphisme (5) consiste à faire correspondre à  $\mathcal{Z}$  le morphisme  $\phi: I \rightarrow A/I$  défini par  $\phi(\alpha_i) = \beta_i$  (ce qui est possible par platitude, voir Eisenbud&Harris [9] ou Douady [8]). Soit alors  $\phi \in \text{Hom}_A(I, A/I)$ . La famille plate  $\mathcal{Z}$  correspondante a pour idéal  $I(\mathcal{Z}) = \langle \alpha + \varepsilon\phi(\alpha), \alpha \in I \rangle$  donc  $(f \times \text{id}_{\mathcal{D}})(\mathcal{Z})$  a pour idéal  $(f^\# \times \text{id})^{-1}I(\mathcal{Z})$ , où  $f^\#: B \xrightarrow{\sim} A$  est tel que  $(f^\#)^{-1}(I) = J$ . Donc

$$\begin{aligned} (f^\# \times \text{id})^{-1}I(\mathcal{Z}) &= \langle (f^\#)^{-1}(\alpha) + \varepsilon(f^\#)^{-1}(\phi(\alpha)), \alpha \in I \rangle \\ &= \langle \gamma + \varepsilon(f^\#)^{-1}(\phi(f^\#(\gamma))), \gamma \in J \rangle \end{aligned}$$

et à cette famille correspond le morphisme

$$(9) \quad (T_\xi f^{[n]})(\phi): J \xrightarrow{f^\#} I \xrightarrow{\phi} A/I \xrightarrow{(f^\#)^{-1}} B/J.$$

Notons les projections de la famille universelle ainsi :

$$\begin{array}{ccc} \Xi_n & \xrightarrow{q} & S \\ \downarrow p & & \\ S^{[n]} & & \end{array}$$

A tout fibré vectoriel  $F$  sur  $S$  on associe le fibré vectoriel *tautologique*  $F^{[n]} := p_* q^* F$  sur  $S^{[n]}$  (il est localement libre car  $p$  est plat) de rang  $\text{rg}(F^{[n]}) = n \cdot \text{rg}(F)$ . La fibre de  $F^{[n]}$  en  $\xi \in S^{[n]}$  est  $F^{[n]}(\xi) = \Gamma(\xi, F)$ . En particulier

$$(T_S)^{[n]}(\xi) = \Gamma(\xi, T_S) = \text{Hom}_{\mathcal{O}_S}(\Omega_S, \mathcal{O}_\xi) = \text{Der}_{\mathbb{C}}(\mathcal{O}_S, \mathcal{O}_\xi).$$

Si  $f: S \rightarrow \Sigma$  est un isomorphisme et  $\zeta := f(\xi)$  on a un isomorphisme

$$(T_f)^{[n]}(\xi): (T_S)^{[n]}(\xi) \xrightarrow{\sim} (T_\Sigma)^{[n]}(\zeta)$$

défini ainsi : à toute section  $\sigma: \xi \rightarrow T_S$  on associe la composée

$$(10) \quad (T_f)^{[n]}(\xi)(\sigma): \zeta \xrightarrow{f^{-1}} \xi \xrightarrow{\sigma} T_S \xrightarrow{T_f} T_\Sigma.$$

On vérifie aisément qu'avec la description en termes de dérivations, l'application  $(T_f)^{[n]}(\xi): \text{Der}_{\mathbb{C}}(\mathcal{O}_S, \mathcal{O}_\xi) \rightarrow \text{Der}_{\mathbb{C}}(\mathcal{O}_\Sigma, \mathcal{O}_\zeta)$  est définie pour  $\delta \in \text{Der}_{\mathbb{C}}(\mathcal{O}_S, \mathcal{O}_\xi)$  par la composée

$$(11) \quad (T_f)^{[n]}(\xi)(\delta): \mathcal{O}_\Sigma \xrightarrow{f^\#} f_* \mathcal{O}_S \xrightarrow{f_* \delta} f_* \mathcal{O}_\xi \xrightarrow{(f^\#)^{-1}} \mathcal{O}_\zeta.$$

On dispose par ailleurs d'une application naturelle

$$(T_S)^{[n]}(\xi) = \text{Der}_{\mathbb{C}}(\mathcal{O}_S, \mathcal{O}_\xi) \xrightarrow{\iota_S(\xi)} \text{Hom}_{\mathcal{O}_S}(\mathcal{I}_\xi, \mathcal{O}_\xi) = T_\xi S^{[n]}, \quad \delta \mapsto \delta|_{\mathcal{I}_\xi}$$

**Remarque 5.** — Cette construction m'a été expliquée par Manfred Lehn. A ma connaissance, elle ne figure pas dans la littérature.

Observons que les deux calculs de différentielle sont compatibles :

**Lemme 3.** — *Le diagramme suivant est commutatif :*

$$\begin{array}{ccc} (T_S)^{[n]}(\xi) & \xrightarrow{\iota_S(\xi)} & T_\xi S^{[n]} \\ (T_f)^{[n]}(\xi) \downarrow & & \downarrow T_\xi f^{[n]} \\ (T_\Sigma)^{[n]}(\zeta) & \xrightarrow{\iota_\Sigma(\zeta)} & T_\zeta \Sigma^{[n]} \end{array}$$

*Démonstration.* — Soit  $\delta \in (T_S)^{[n]}(\xi)$  une dérivation. Avec (8) on calcule que  $(T_\xi f^{[n]} \circ \iota_S(\xi))(\delta)$  est le morphisme

$$\mathcal{I}_\zeta \xrightarrow{f^\#} f_* \mathcal{I}_\xi \xrightarrow{f_*(\delta|_{\mathcal{I}_\xi})} f_* \mathcal{O}_\xi \xrightarrow{(f^\#)^{-1}} \mathcal{O}_\zeta$$

tandis qu'avec (10)  $(\iota_\Sigma(\zeta) \circ (T_f)^{[n]}(\xi))(\delta)$  est le morphisme

$$\mathcal{I}_\zeta \hookrightarrow \mathcal{O}_\zeta \xrightarrow{f^\#} f_* \mathcal{O}_S \xrightarrow{f_* \delta} f_* \mathcal{O}_\xi \xrightarrow{(f^\#)^{-1}} \mathcal{O}_\zeta.$$

Ces deux morphismes sont égaux puisque  $f^\#(\mathcal{I}_\zeta) = f_* \mathcal{I}_\xi$ . □

**Proposition 4.** — *Soit  $\xi \in S^{[n]}$ . Si  $\xi \subset S$  est réduit, alors  $\iota_S(\xi)$  est un isomorphisme.*

*Démonstration.* — Puisque  $S$  est une surface lisse,  $S^{[n]}$  est lisse de dimension  $2n$  et  $\dim T_\xi S^{[n]} = 2n = \dim (T_S)^{[n]}(\xi)$ . Il suffit donc de montrer que  $\iota_S(\xi)$  est injective. Puisque le support de  $\xi$  est fini, on peut se placer sur un ouvert affine de  $S$  contenant  $\xi$ , voire supposer que  $S$  est affine. Le résultat découle alors du lemme suivant avec  $A = \mathcal{O}(S)$ ,  $I = \mathcal{I}_\xi$  produit d'idéaux maximaux deux à deux distincts si  $\xi$  est réduit :

**Lemme 4.** — *Soit  $K$  un corps,  $A$  une  $K$ -algèbre,  $I \subset A$  un idéal et  $\delta: A \rightarrow A/I$  une  $K$ -dérivation. Si  $I$  est un produit d'idéaux maximaux deux à deux distincts, alors  $\delta|_I = 0$  implique  $\delta = 0$ .*

*Démonstration du lemme.* — Notons  $I = \prod_{i=1}^n m_i$ , les  $m_i$  étant des idéaux maximaux deux à deux distincts. Si  $n = 0$  le résultat est trivial et si  $n = 1$  il est clair grâce à la décomposition vectorielle  $A \cong m \oplus K$ . Nous supposons donc que  $n \geq 2$ . Soit  $a \in A$ , que nous décomposons de manière unique pour tout  $i$  sous la forme  $a = x_i + \lambda_i$  avec  $x_i \in m_i$ ,  $\lambda_i \in K$ . Rappelons que  $A/I \cong \bigoplus_{i=1}^n A/m_i$ . Puisque  $x_1 \cdots x_n \in I$  on calcule

$$0 = \delta(x_1 \cdots x_n) = \sum_{i=1}^n x_1 \cdots \widehat{x_i} \cdots x_n \delta(x_i)$$

où  $x_1 \cdots \widehat{x_i} \cdots x_n \delta(x_i)$  est la composante dans  $A/m_i$ . En notant que  $x_j = x_i + (\lambda_i - \lambda_j)$  on obtient

$$x_1 \cdots \widehat{x_i} \cdots x_n \delta(x_i) = \prod_{j \neq i} (\lambda_i - \lambda_j) \delta(x_i) \in A/m_i.$$

Si  $\prod_{j \neq i} (\lambda_i - \lambda_j) = 0$  pour tout  $i$ , alors  $\lambda_1 = \dots = \lambda_n$  donc  $x_1 = \dots = x_n \in \bigcap_{i=1}^n m_i = I$ , donc  $\delta(a) = 0$ . Sinon, l'un des  $x_i$  est tel que  $\delta(x_i) = 0$  donc  $\delta(a) = 0$ . □

□

Il résulte de cette étude qu'en un point  $\xi \in S^{[n]}$  tel que  $\xi \subset S$  est réduit, on peut facilement calculer la différentielle de  $f^{[n]}$  en  $\xi$  par la formule (9) qui ne dépend que de  $f$ . En particulier, si  $f: S \xrightarrow{\sim} S$  est un automorphisme et  $\xi \in S^{[n]}$  un point fixe de  $f^{[n]}$  de support réduit, alors la différentielle de  $f^{[n]}$  en  $\xi$  est l'application associant à une section  $\sigma: \xi \rightarrow T_S$  la section  $T_f \circ \sigma \circ f^{-1}: \xi \rightarrow T_S$ .

**4.2. Etude des points fixes.** — Si  $X$  est une variété analytique complexe lisse,  $f \in \text{Aut}(X)$  et  $x \in X$  un point fixe de  $f$ , rappelons qu'il est dit *non dégénéré* si  $\det(T_x f - \text{id}) \neq 0$ . Si  $f$  est linéarisable au voisinage de  $x$  (typiquement quand  $f$  est d'ordre fini) et si  $x$  est non dégénéré, alors il est isolé.

Soit  $f \in \text{Aut}(S)$  et  $n \geq 2$ . Si  $F \subset S$  est une sous-variété fixe par  $f$ , la sous-variété  $F^{[n]} \subset S^{[n]}$  n'est en général pas une composante de points fixes de  $f^{[n]}$  : le problème vient essentiellement des points épais. Précisément, les sous-espaces analytiques  $\xi \in S^{[n]}$  fixes sous  $f^{[n]}$  sont réunions à supports disjoints de sous-espaces *réduits* de la forme :

- $\{x\}$  où  $x$  est un point fixe de  $f$ ,
  - $\{x, f(x), \dots, f^{k-1}(x)\}$  où  $x$  est un point périodique d'ordre  $k$  de  $f$ ,
- et *potentiellement* de sous-espaces *non réduits* (où *épais*) de la forme :
- $\{\xi_x\}$  où  $x$  est un point fixe de  $f$  et  $\xi_x$  un sous-espace épais porté en  $x$ ,
  - $\{\xi_x, f(\xi_x), \dots, f^{k-1}(\xi_x)\}$  où  $x$  est un point périodique d'ordre  $k$  de  $f$  et  $\xi_x$  un sous-espace épais porté en  $x$ ,

de telle sorte que la somme des points fixes et des longueurs des orbites, comptés avec leur multiplicité éventuelle, fasse  $n$ . Pour calculer  $T_\xi f^{[n]}$  en un tel point, il suffit de savoir le faire pour chaque type possible, en vertu du lemme suivant.

**Lemme 5.** — Si  $\xi_1, \dots, \xi_k$  sont de l'un des quatre types précédents et de supports disjoints, avec  $\xi_i \in S^{[n_i]}$  et  $\xi = \xi_1 \cup \dots \cup \xi_k \in S^{[n]}$ , alors  $T_\xi S^{[n]} \cong \bigoplus_{i=1}^k T_{\xi_i} S^{[n_i]}$  et pour cette décomposition  $T_\xi f^{[n]} = \bigoplus_{i=1}^k T_{\xi_i} f^{[n_i]}$ .

*Démonstration.* — Si les  $\xi_i$  sont tous réduits,  $\Gamma(\xi, S) = \bigoplus_{i=1}^k \Gamma(\xi_i, S)$  et  $T_\xi f^{[n]}$  respecte cette décomposition donc le résultat est clair. Dans le cas général, il suffit d'observer que si  $I$  et  $J$  sont deux idéaux d'un anneau  $A$ , tels que  $I + J = A$ , alors on a un isomorphisme de  $A$ -modules :

$$\text{Hom}_A(IJ, A/IJ) \cong \text{Hom}_A(I, A/I) \oplus \text{Hom}_A(J, A/J).$$

En effet, on a  $A/IJ \cong A/I \oplus A/J$ , dont nous notons  $p_1$  et  $p_2$  les projections. Prenons  $\alpha \in I$  et  $\beta \in J$  tels que  $\alpha + \beta = 1$ . A tout  $\theta \in \text{Hom}_A(IJ, A/IJ)$  on fait correspondre  $\phi(x) = p_1 \theta(x\beta) \in \text{Hom}_A(I, A/I)$  et  $\psi(y) = p_2 \theta(\alpha y) \in \text{Hom}_A(J, A/J)$ . Réciproquement, à un couple  $(\phi, \psi)$  on associe  $\theta$  définie pour tout  $x \in I$  et  $y \in J$  par  $\theta(xy) = \phi(x)y + \psi(y)x$  vu comme élément de  $A/IJ$ . On vérifie aisément que ces applications sont inverses l'une de l'autre et que la différentielle, calculée avec la formule (9), respecte la décomposition.  $\square$

**4.2.1. Points fixes réduits.** —

**Proposition 5.** — Si  $x_1, \dots, x_n$  sont des points fixes isolés et non dégénérés de  $f$ , alors  $\xi := \{x_1, \dots, x_n\} \in S^{[n]}$  est un point fixe isolé et non dégénéré de  $f^{[n]}$ .



*Démonstration.* — Montrons que  $\xi$  est un point fixe isolé. En se plaçant dans un voisinage affine de  $\xi$ , si  $\xi$  n'est pas isolé il existe une suite  $(\xi^i)$  de points fixes de  $f^{[n]}$  convergeant vers  $\xi$ . Quitte à restreindre le voisinage, on peut supposer que tous les  $\xi^i$  sont des sous-espaces réduits, et on pose  $\xi^i = \{x_1^i, \dots, x_n^i\}$ . Les 0-cycles  $\sum_j x_j^i \in S^{(n)}$  correspondant via  $\rho$  convergent donc vers  $\rho(\xi)$  et puisque le revêtement  $S^n \rightarrow S^{(n)}$  est non ramifié au-dessus de  $S^{(n)} \setminus D$ , on peut choisir des relèvements de cette suite telle que, dans  $S^n$ , la suite  $(x_1^i, \dots, x_n^i)$  converge vers  $(x_1, \dots, x_n)$ . Puisque  $f^{[n]}(\xi^i) = \xi^i$ , pour tout  $i$  il existe une transposition  $\tau_i \in \mathfrak{S}_n$  telle que  $f(x_j^i) = x_{\tau_i(j)}^i$ . La suite  $i \mapsto \tau_i$  est à valeurs dans un ensemble fini, donc elle prend au moins une valeur une infinité de fois. Quitte à extraire une sous-suite, on peut donc supposer que  $\tau_i = \tau$  est constante. Par passage à la limite,  $f(x_j) = x_{\tau(j)}$  pour tout  $j$ , ce qui force  $\tau = \text{id}$  puisque les  $x_j$  sont fixes par  $f$ . On a donc trouvé des suites de points fixes tendant vers les  $x_i$ , contradiction.

Montrons que  $\xi$  est non dégénéré. Soit  $\sigma \in T_\xi S^{[n]}$ . Puisque  $\xi$  est réduit,  $\sigma \in \Gamma(\xi, T_S)$  et si  $T_\xi f^{[n]}(\sigma) = \sigma$  cela signifie que  $T_f \circ \sigma \circ f^{-1} = \sigma$ , mais  $f|_\xi = \text{id}$  donc  $T_f \circ \sigma = \sigma$  ce qui donne  $(T_{x_j} f)(\sigma(x_j)) = \sigma(x_j)$  pour tout  $j$  et contredit l'hypothèse de non dégénérescence des  $x_j$ .  $\square$

**Proposition 6.** — *Si  $x$  est un point périodique d'ordre  $n \geq 2$  de  $f$ , alors son orbite  $\xi := \{x, f(x), \dots, f^{n-1}(x)\} \in S^{[n]}$  est un point fixe dégénéré de  $f^{[n]}$  tel que  $\dim \ker(T_\xi f^{[n]} - \text{id}) = 2$ .*

*Démonstration.* — Soit  $\sigma \in \Gamma(\xi, T_S)$  un vecteur tangent. Si  $\sigma = T_\xi f^{[n]}(\sigma)$ , alors pour tout  $i = 0, \dots, n$  on a

$$\sigma(f^i(x)) = (T_f \circ \sigma \circ f^{-1})(f^i(x)) = (T_{f^{i-1}(x)} f)(\sigma(f^{i-1}(x)))$$

donc  $\sigma$  est entièrement caractérisé par  $\sigma(x) \in T_x S$ , donc  $\ker(T_\xi f^{[n]} - \text{id}) \cong T_x S$ .  $\square$

**Remarque 6.** — *Si  $f$  est d'ordre  $p$  premier et si  $n < p$ ,  $f^{[n]}$  n'a pas de point fixe  $\xi \in S^{[n]}$  contenant des orbites de points périodiques d'ordre  $k$  tel que  $2 \leq k \leq n$ . Par contre, si  $f$  est d'ordre fini et admet des points périodiques d'ordre  $n$ , la proposition 6 montre que leur lieu dans  $S^{[n]}$  est contenu dans une surface fixe.*

**4.2.2. Points fixes épais.** — Soit  $x \in S$  et  $B_n(x) := \rho^{-1}(n \cdot x)$  la sous-variété des sous-espaces épais portés en  $x$ . C'est une sous-variété irréductible de dimension  $n - 1$  (voir Briançon [5]).

Nous supposons à partir de maintenant que l'automorphisme  $f$  de  $S$  est d'ordre fini. Si  $x$  est un point fixe de  $f$ , on peut donc linéariser l'action au voisinage de  $x$ , ce qui ramène l'étude des sous-espaces épais fixes par  $f^{[n]}$  au cas où  $S = \mathbb{C}^2$ ,  $x = (0, 0) \in \mathbb{C}^2$  et  $f$  est une application linéaire d'ordre fini. Choisissons un système de coordonnées  $X, Y$  dans lequel la matrice de  $f$  est diagonale et notons  $\varepsilon_1, \varepsilon_2$  ses valeurs propres (ce sont des racines de l'unité). Si  $\xi$  est un sous-espace porté en  $(0, 0)$ , on distingue deux cas simples :

- l'idéal  $I_\xi$  est *monomial*,
- l'idéal  $I_\xi$  est *curvilinéaire*.

Le nombre d'idéaux monomiaux est égal au nombre de partitions de l'entier  $n$  tandis que les points curvilinéaires sont denses dans  $B_n(x)$ . Si  $n \leq 3$ , tout point épais est de l'un de ces types.

**Proposition 7.** — *Si  $f$  est d'ordre fini, tout sous-espace épais d'idéal monomial est fixe sous  $f^{[n]}$ .*

*Démonstration.* — Soit  $\lambda = (\lambda_1 \geq \dots \geq \lambda_k)$  une partition de  $n$ . Notons son diagramme de Young par  $D(\lambda) := \{(i, j) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \mid i < \lambda_{j+1}\}$ . L'idéal monomial de partition  $\lambda$  s'écrit  $I_\lambda = \langle X^i Y^j \mid (i, j) \notin D(\lambda) \rangle$ . Puisque  $f$  agit diagonalement dans ce système de coordonnées, l'idéal  $I_\lambda$  est clairement invariant par  $f$ .  $\square$

En conservant les notations de la démonstration, une base du quotient  $\mathbb{C}[X, Y]/I_\lambda$  est constituée des monômes  $X^u Y^v$  tels que  $(u, v) \in D(\lambda)$ . Un système minimal de générateurs de  $I_\lambda$  parmi les  $X^i Y^j$  tels que  $(i, j) \notin D(\lambda)$  se trouve en ne conservant que les indices  $(i, j)$  figurant à une *marche* du bord du domaine  $(\mathbb{N} \times \mathbb{N}) \setminus D(\lambda)$ . Notons  $G(\lambda)$  cet ensemble d'indices. Un vecteur tangent au point défini par cet idéal correspond à un morphisme  $\varphi \in \text{Hom}_{\mathbb{C}[X, Y]}(I_\lambda, \mathbb{C}[X, Y]/I_\lambda)$  et est donc donné par une matrice  $(\alpha_{i,j}^{u,v})$  définie par  $\varphi(X^i Y^j) = \sum_{u,v} \alpha_{i,j}^{u,v} X^u Y^v$  pour  $(i, j) \in D(\lambda)$  et  $(u, v) \in G(\lambda)$  (les coefficients  $\alpha_{i,j}^{u,v}$  sont soumis à des relations venant des relations entre les générateurs de  $I_\lambda$ ). La différentielle de  $f^{[n]}$  en  $\varphi$ , calculée par la formule (9), envoie la matrice  $(\alpha_{i,j}^{u,v})$  sur  $(\varepsilon_1^{i-u} \varepsilon_2^{j-v} \alpha_{i,j}^{u,v})$ . S'il n'existe pas d'indices  $(i, j) \in G(\lambda)$  et  $(u, v) \in D(\lambda)$  tels que  $\varepsilon_1^{i-u} \varepsilon_2^{j-v} = 1$ , alors le point fixe est non dégénéré et isolé.

Etudions maintenant les points épais curvilinéaires. Pour  $n = 2$ , ils sont de la forme  $I_{(\lambda;\mu)} := \langle \lambda x + \mu y, x^2, y^2 \rangle$  pour  $(\lambda : \mu) \in \mathbb{P}_{\mathbb{C}}^1 \setminus \{(1 : 0), (0 : 1)\}$  (les points exclus donnent les deux idéaux monomiaux de la fibre exceptionnelle). Alors  $(f^\#)^{-1}(I_{(\lambda;\mu)}) = I_{(\varepsilon_1^{-1}\lambda : \varepsilon_2^{-1}\mu)}$  est fixe si et seulement si  $\varepsilon_1 = \varepsilon_2$ , auquel cas tous les idéaux curvilinéaires de longueur deux sont fixes. Pour  $n \geq 3$ , ils sont de la forme  $I_{\underline{\alpha}} := \langle y + \alpha_1 x + \dots + \alpha_{n-1} x^{n-1}, x^n \rangle$  (ou avec  $x$  et  $y$  échangés), avec  $\underline{\alpha} = (\alpha_1, \dots, \alpha_{n-1}) \in \mathbb{C}^{n-1}$  non nul. On calcule de même que  $(f^\#)^{-1}(I_{\underline{\alpha}}) = I_{\underline{\alpha}'}$  avec  $\alpha'_i = \alpha_i \varepsilon_2 \varepsilon_1^{-i}$ . Le point est donc fixe si et seulement si pour chaque indice  $i$  tel que  $\alpha_i$  est non nul, on a  $\varepsilon_2 = \varepsilon_1^i$ . Ainsi, s'il existe un indice  $i \in \{1, \dots, n-1\}$  tel que  $\varepsilon_2 = \varepsilon_1^i$ , alors tous les points curvilinéaires de la forme  $\underline{\alpha} = (0, \dots, 0, \alpha_i, 0, \dots, 0)$  sont fixes. En particulier, un point curvilinéaire fixe n'est jamais isolé.

L'étude des points fixes constitués de l'orbite d'un point épais est plus délicate. Si  $f$  est d'ordre premier  $p$ , pour tout  $x \in S$  et tout point épais  $\xi$  de longueur  $\ell$  et de support  $x$ , l'orbite  $\{\xi, f(\xi), \dots, f^{p-1}(\xi)\} \in S^{[p\ell]}$  est un point fixe non isolé : ce lieu de points fixes est de dimension  $\ell - 1$  si  $x$  est fixé et  $\ell + 1$  si  $x$  varie dans  $S$ .

**Exemple 1.** — *Si  $S$  est un tore complexe et  $f$  l'involution  $f(x) = -x$ , elle admet exactement 16 points fixes isolés dont l'action locale en chacun d'eux a pour valeurs propres  $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = -1$ . Donc tous les points épais de longueur deux sont fixes sous  $f^{[2]}$  dans  $S^{[2]}$ . Considérons la surface de  $S^{[2]}$  constituée des orbites  $\{x, f(x)\}$  lorsque  $x$  n'est pas un point fixe de  $f$ . Sa fermeture contient donc les 16 courbes de points épais portés en les points fixes de  $f$ , donc s'identifie à la surface de Kummer  $K^2(S)$ ,*

définie comme la fibre au-dessus de 0 de la composée  $S^{[2]} \xrightarrow{\rho} S^{(2)} \xrightarrow{+} S$ , qui est la résolution minimale du quotient  $S/f$ . Notons que les points fixes de  $f^{[2]}$  de la forme  $\{x, x'\}$  où  $x$  et  $x'$  sont deux points fixes distincts de  $f$  restent en-dehors et donnent 120 points fixes isolés.

**Exemple 2.** — Soit  $S$  une surface K3 algébrique admettant un automorphisme symplectique (i.e. laissant invariante la forme symplectique)  $f$  d'ordre premier  $p$  valant 3, 5 ou 7. D'après Nikulin [25],  $f$  admet un nombre fini  $m_p$  de points fixes isolés valant respectivement 6, 4 et 3. Considérons l'action de  $f^*$  sur  $H^2(S, \mathbb{C})$  : notons  $a_p$  la multiplicité de la valeur propre 1 et  $b_p$  celle de  $\xi^i$ ,  $i = 1, \dots, p-1$ , où  $\xi$  est une racine primitive  $p$ -ième de l'unité (elles ont toutes la même multiplicité). D'après Garbagnati & Sarti [13, Proposition 1.1], leurs valeurs sont :  $a_3 = 10, b_3 = 6, a_5 = 6, b_5 = 4, a_7 = 4, b_7 = 3$ . L'action de  $f^{[2]}$  sur  $S^{[2]}$  n'a que des points fixes isolés et non dégénérés (l'action locale de  $f$  a pour valeurs propres  $\varepsilon_1 = \xi$  et  $\varepsilon_2 = \bar{\xi}$ ), leur nombre est  $\frac{m_p(m_p-1)}{2} + 2m_p$ , respectivement 27, 14 et 9 (paires de points fixes et points épais monomiaux de multiplicité deux), nombre que l'on obtient encore avec la formule de Lefschetz en utilisant la proposition 3. Par contre, pour  $n = 3$  et  $p = 5$ , la même formule donne 36 points fixes isolés : on en compte en effet 4 formés de triplets de points fixes, 24 formés d'un point fixe réduit et d'un point fixe double, mais parmi les 12 points triples monomiaux, 4 sont dégénérés (ceux associés à la partition  $(1, 1, 1)$ ) et il y a des composantes de points curvilinéaires fixes.

## Références

- [1] A. BEAUVILLE – « Some remarks on Kähler manifolds with  $c_1 = 0$ . », Classification of algebraic and analytic manifolds, Proc. Symp., Katata/Jap. 1982, Prog. Math. 39, 1-26 (1983), 1983.
- [2] ———, « Variétés Kähleriennes dont la première classe de Chern est nulle », *J. Differential Geom.* **18** (1983), no. 4, p. 755–782.
- [3] S. BOCHNER & D. MONTGOMERY – « Groups on analytic manifolds. », *Ann. Math.* **48** (1947), no. 2, p. 659–669.
- [4] S. BOISSIÈRE & A. SARTI – « Automorphismes de l'espace de Douady de points sur une surface K3 », prépublication.
- [5] J. BRIANÇON – « Description de  $\text{Hilb}^n \mathbb{C}\{x, y\}$  », *Invent. Math.* **41** (1977), no. 1, p. 45–89.
- [6] M. A. DE CATALDO & L. MIGLIORINI – « The Douady space of a complex surface », *Adv. Math.* **151** (2000), no. 2, p. 283–312.
- [7] J. CHEAH – « On the cohomology of Hilbert schemes of points », *J. Algebraic Geom.* **5** (1996), no. 3, p. 479–511.
- [8] A. DOUADY – « Le problème des modules pour les sous-espaces analytiques compacts d'un espace analytique donné. », *Ann. Inst. Fourier* **16** (1966), no. 1, p. 1–95.
- [9] D. EISENBUD & J. HARRIS – *The geometry of schemes*, Graduate Texts in Mathematics, vol. 197, Springer-Verlag, New York, 2000.
- [10] J. FOGARTY – « Algebraic families on an algebraic surface », *Amer. J. Math.* **90** (1968), p. 511–521.
- [11] ———, « Algebraic families on an algebraic surface. II. The Picard scheme of the punctual Hilbert scheme », *Amer. J. Math.* **95** (1973), p. 660–687.

- [12] A. FUJIKI – « Countability of the Douady space of a complex space. », *Jap. J. Math., New Ser.* **5** (1979), p. 431–447.
- [13] A. GARBAGNATI & A. SARTI – « Symplectic automorphisms of prime order on  $K3$  surfaces », *J. Algebra* **318** (2007), no. 1, p. 323–350.
- [14] R. GODEMENT – *Introduction à la théorie des groupes de lie*, Publications Mathématiques de l'Université Paris VII, 1982.
- [15] L. GÖTTSCHE – « The Betti numbers of the Hilbert scheme of points on a smooth projective surface », *Math. Ann.* **286** (1990), no. 1-3, p. 193–207.
- [16] L. GÖTTSCHE & W. SOERGEL – « Perverse sheaves and the cohomology of Hilbert schemes of smooth algebraic surfaces », *Math. Ann.* **296** (1993), no. 2, p. 235–245.
- [17] A. GROTHENDIECK – « Techniques de construction et théorèmes d'existence en géométrie algébrique. IV. Les schémas de Hilbert », in *Séminaire Bourbaki, Vol. 6*, Soc. Math. France, Paris, 1995, p. Exp. No. 221, 249–276.
- [18] D. HUYBRECHTS – « Compact hyper-Kähler manifolds : basic results », *Invent. Math.* **135** (1999), no. 1, p. 63–113.
- [19] H. KERNER – « Über die Automorphismengruppen kompakter komplexer Räume. », *Arch. Math.* **11** (1960), p. 282–288.
- [20] M. LEHN – « Lectures on Hilbert schemes. », Hurtubise, Jacques (ed.) et al., Algebraic structures and moduli spaces. Proceedings of the CRM workshop, Montréal, Canada, July 14-20, 2003. Providence, RI : American Mathematical Society (AMS). CRM Proceedings & Lecture Notes 38, 1-30 (2004)., 2004.
- [21] M. LEHN & C. SORGER – « The cup product of Hilbert schemes for  $K3$  surfaces », *Invent. Math.* **152** (2003), no. 2, p. 305–329.
- [22] C. T. MCMULLEN – « Dynamics on  $K3$  surfaces : Salem numbers and Siegel disks », *J. Reine Angew. Math.* **545** (2002), p. 201–233.
- [23] H. NAKAJIMA – « Heisenberg algebra and Hilbert schemes of points on projective surfaces », *Annals of math.* **145** (1997), p. 379–388.
- [24] M. NIEPER-WISSKIRCHEN – *Chern numbers and Rozansky-Witten invariants of compact hyper-Kähler manifolds*, World Scientific Publishing Co. Inc., River Edge, NJ, 2004.
- [25] V. V. NIKULIN – « Finite groups of automorphisms of Kählerian  $K3$  surfaces », *Trudy Moskov. Mat. Obshch.* **38** (1979), p. 75–137.
- [26] J. H. M. STEENBRINK – « Mixed Hodge structure on the vanishing cohomology », in *Real and complex singularities (Proc. Ninth Nordic Summer School/NAVF Sympos. Math., Oslo, 1976)*, Sijthoff and Noordhoff, Alphen aan den Rijn, 1977, p. 525–563.

---

27 mai 2009

SAMUEL BOISSIÈRE, Laboratoire J.A.Dieudonné UMR CNRS 6621, Université de Nice Sophia-Antipolis, Parc Valrose, 06108 Nice • E-mail : [sb@math.unice.fr](mailto:sb@math.unice.fr)  
 Url : <http://math.unice.fr/~sb/>